EULER EN DE MODERNE GETALLEN

Harm Boukema

INLEIDING

0.1 De landkaart

Niet alleen voor kinderen die op school leren rekenen, maar ook voor geschoolde en geleerde wiskundigen zijn de zogenaamde ‘natuurlijke’ getallen de meest elementaire. Als je afziet van de oneindig grote ‘getallen’ die Cantor (1845-1918) heeft geïntroduceerd en van de eindige getalsystemen modulo n, die in de twintigste-eeuwse algebra aandacht hebben gekregen, kan het systeem van de natuurlijke getallen in twee richtingen worden uitgebreid: enerzijds middels gebroken en irrationale getallen, anderzijds middels negatieve en imaginaire getallen. In beide gevallen vooronderstelt de tweede stap de eerste. Het is niet mogelijk irrationale getallen zoals $\sqrt{2}$ te erkennen zonder dat eerst de rationale getallen zijn ingevoerd. En zo is het even onmogelijk het imaginaire getal i te introduceren, als de negatieve getallen nog niet zijn ingeburgerd.

Als je aanneemt dat dit de enige beperkingen zijn (in een later stadium zal ik deze aaname aan kritiek onderwerpen), kan iedereen die een beetje wiskundig geschoold is, zelf bedenken hoe de landkaart er uitziet, waarop alle mogelijke wegen zijn aangegeven die van de natuurlijke naar het volledige systeem van de complexe getallen voeren. De situatie is als volgt: elke route bestaat uit vier stappen en passeert drie stations die tussen het vertrekpunt en het eindpunt gelegen zijn. Als je eerst in één richting tot het uiterste wilt gaan, zijn er twee en slechts twee mogelijkheden: óf via de positieve rationale getallen naar de positieve reële getallen en dan via de positieve en negatieve reële getallen naar het eindstation óf via de gehele positieve en negatieve getallen naar de complexe gehele getallen en dan via de rationale complexe getallen naar het eindstation. Als je een middenweg wilt volgen, moet je na de eerste stap van de extremisten scheiden door naar het systeem van de positieve en negatieve rationale getallen af te wijken. Dat middenstation kan op twee manieren bereikt worden en op twee manieren verlaten worden. Er zijn dus vier middenwegen die de eerste en de laatste stap met één van de extremistische routes gemeen hebben. In totaal zijn er dus zes wegen en zeven mogelijke tussenstations. (zie het bijgaande schema)

Schema

De vraag of de complexe getallen voor verdere uitbreiding vatbaar zijn, is door Hamilton (1805-1865) nader onderzocht. Hij heeft laten zien dat er twee imaginaire dimensies moeten worden toegevoegd en dat in het aldus ontstane systeem de commutativiteit van de vermenigvuldiging verloren gaat. Aannemende dat dit laatste in strijd is met datgene wat we als essentieel voor getallen plegen te beschouwen, hoeven we aan Hamilton’s quaternionen, hoe interessant ze ook mogen zijn, in onze uiteenzetting over de verruiming van het getalbegrip geen aandacht meer te besteden. We kunnen ons beperken tot de zes hierboven genoemde manieren waarop je uitgaande van de natuurlijke getallen bij het volledige systeem van de complexe getallen kunt uitkomen.

0.2 De historische route

Welke weg heeft de wiskunde in de loop van haar geschiedenis in feite bewandeld? De uiterst rechts gelegen route. Aan zoiets als negatieve of imaginaire getallen hebben de Grieken nooit en te nimmer gedacht. Wel hebben ze irrationale proporties ontdekt. Maar ze weigerden die als getallen te erkennen. Dat is pas veel later, betrekkelijk ongemerkt gebeurd, toen in de Renaissance de draad van de Griekse wetenschapsbeoefening weer werd opgepakt.
Negatieve en imaginaire getallen deden o.a. bij Cardano (1501-1576) hun intrede. Maar ze werden aanvankelijk door verreweg de meeste wiskundigen, waarschijnlijk door Cardano zelf ook, als verzinsels beschouwd die in de wereld van de echte getallen niet thuishoren. Pas veel later, in de loop van de achttiende eeuw zijn ze mede door toedoen van Euler (1707-1783) en d'Alembert (1717-1783) ingeburgerd geraakt.

0.3 Vraagstelling en benaderingswijze

Hoe verhoudt zich deze feitelijke, in de geschiedenis afgelegde weg tot de landkaart waarop we die hebben ingetekend? Dat is de centrale vraag die ik hoop te beantwoorden door systematisch van de meest voor de hand liggende standaardopvatting af te wijken.
Deze standaardopvatting houdt in dat de zojuist geschetste manier waarop het getalbegrip in de loop van de geschiedenis in feite verruimd is, over de correctheid van de landkaart nooit en te nimmer iets kan leren. Die is boven alle twijfel verheven. De hypothese die ik in 0.1 met het gecursiveerde woordje *als* heb aangeduid, kan volgens deze zienswijze met een gerust hart tot een these worden omgedoopt.
In de volgende paragraaf zal ik deze opvatting in zes punten, genummerd als a), b1), b2), b3), c1) en c2) samenvatten. Ik hoop dat de lezer zich grotendeels in deze geloofsartikelen kan vinden, want ik wil niet tegen windmolens vechten.
Daarna zal ik in 0.5 een kort overzicht geven van de gang van mijn betoog. Vertrekkend vanuit het laatste punt, het enige waar ik het mee eens ben, zal ik in omgekeerde volgorde de overige vijf punten doorlopen om mijn antithesen kort toe te lichten. Eén van de consequenties van de door mij gehuldigde zienswijze is, dat aan de beroemde formule van Euler (…..), vaak geroemd als de mooiste die in de hele wiskunde te vinden is, in verband met de verruiming van het getalbegrip een veel grotere betekenis toekomt dan gewoonlijk wordt aangenomen.

0.3 De standaard opvatting

a)Uiteraard is de landkaart pas in de loop van de geschiedenis ontdekt. Maar omdat de wiskunde vooruit gaat, mag redelijkerwijs worden aangenomen dat de onwetenschappelijke *vooroordelen* die in het verleden een remmende werking hebben uitgeoefend, definitief zijn *overwonnen*. Wel is het historisch interessant irrationele angsten of dogma's uit het verleden te leren kennen, maar voor de wiskunde zelf is het niet meer nodig met die achterhaalde opvattingen een discussie aan te gaan.

b1) Uitgaande van de natuurlijke getallen kun je in principe net zo goed naar links als naar rechts gaan, naar de positieve en negatieve gehele getallen als naar de positieve rationale getallen. Wil je niet alleen een vergelijking zoals 5+x=12, maar ook 12+x=5 kunnen oplossen, dan moet je negatieve getallen introduceren. En wil je dat niet alleen 12.5=x oplosbaar is, maar ook 12.x=5, dan heb je gebroken getallen nodig. Het feit dat het de negatieve getallen zoveel moeite heeft gekost ingeburgerd te raken, vraagt om een historisch-psychologische verklaring.

b2) Optellen en vermenigvuldigen zijn de basisbewerkingen waardoor de algebraïsche structuren zoals ‘integriteitsgebied’, ‘ring’ en ‘lichaam’ bepaald worden. De overeenkomsten en verschillen tussen uiteenlopende getalsystemen kunnen met behulp daarvan beschreven worden. *Machtsverheffen hoeft niet apart beschouwd te worden*. Het is een afgeleide bewerking die in feite niets anders is dan herhaalde vermenigvuldiging.

b3) *Het heeft geen zin naar het ‘wezen’ van de getallen te vragen*. Want de bestaande getalsystemen zijn op vele verschillende manieren met elkaar verwant. Ze vormen, zoals de filosoof Wittgenstein (1889-1951) treffend heeft opgemerkt, eerder een *familie* dan een wezensgemeenschap. De grenzen van die familie zijn vaag. Het hangt van het gebruik van het woord “getal” af wat men nog wel of niet meer wenst te accepteren. Tegen mensen die de quaternionen als hypercomplexe getallen wensen te beschouwen, kan alleen maar gezegd worden, dat ze van het gangbare taalgebruik afwijken.

c1) Omdat de vraag of irrationale getallen geaccepteerd kunnen worden, pas kan opkomen als je al over rationale getallen beschikt (zie 0.1), moet het wel zo zijn dat *de Grieken, toen ze irrationale proporties ontdekten, de rationale getallen al hadden erkend*.

c2) *Hoe het komt dat ze desondanks weigerden irrationale getallen te accepteren, vraagt om een historische verklaring*.

0.4 De gang van mijn betoog

1) (ad c1) Zoals eerder gezegd is het laatste het enige punt waar ik het mee eens ben. Daar ligt het vertrekpunt van mijn betoog. De gezochte historische verklaring is in wezen heel eenvoudig. De Grieken hebben irrationale proporties ontdekt uitgaande van de vooronderstelling *dat alleen de getallen die wij ‘natuurlijk’ plegen te noemen, bestaan*.

2) (ad b3) De vraag is daarom: Welke overwegingen liggen aan dit dogma ten grondslag? Ze zijn deels bij Aristoteles (384-322 v.C) te vinden en kunnen deels op basis van de filosofie van Pythagoras (6e eeuw v.C) worden gereconstrueerd. Deze overwegingen zijn bijzonder serieus van aard. Ze kunnen mijns inziens alleen worden ontzenuwd door ze te ontmaskeren als miskenning van het wezen van het kwantitatieve in het algemeen en het getalmatige in het bijzonder. Anders gezegd: de vraag waarom de ratio van natuurlijke getallen recht heeft op de titel ‘getal’, voert vanzelf naar het *wezen van de getallen*.

3) (ad b2) Gezien vanuit dit ongebruikelijke perspectief blijkt *machtsverheffen de enige exclusief getalmatige bewerking te zijn*.

4) (ad b1) Negatieve en imaginaire getallen kunnen niet los van machtsverheffen worden gerechtvaardigd. Ze dienen zich pas aan nadat de rationale getallen zijn geaccepteerd. *De uiterst linkse route is pas begaanbaar nadat een meer rechts gelegen route bewandeld is*.

5) (ad a) De landkaart is dus niet boven alle vooroordelen verheven. Daarom rijst de vraag waar de illusie dat dat wél zo zou zijn, vandaan komt. Het heeft te maken met *de manier waarop onze Westerse beschaving het Griekse erfgoed heeft gerecipieerd*.

1 DE ONTDEKKING VAN HET IRRATIONALE

1.1 Getallen, tellen en vertellen

Ook al is het waar dat de vraag of er irrationale getallen bestaan, alleen kan opkomen als de rationale getallen hun intrede hebben gedaan, daaruit volgt allerminst dat het voor de ontdekking van irrationale proporties nodig is andere dan natuurlijke getallen te erkennen. De Grieken wisten dat getallen in een bepaalde verhouding staan en ook dat één en dezelfde *ratio* bij oneindig veel verschillende getalparen is terug te vinden. Dezelfde verhouding waarin 5 staat tot 7 bestaat ook tussen 10 en 14 of tussen 15 en 21 enz. Maar ze weigerden dergelijke verhoudingen als *getallen* te beschouwen. Voor hen sprak het vanzelf dat elk getal met het telbare te maken heeft.

De ontdekking van het irrationale hield voor de Grieken in dat er meetbare proporties zijn, die niet als verhouding bij de getallen zijn terug te vinden. Deze ontdekking bracht een schok teweeg. Maar die had helemaal niets te maken met een in de kiem gesmoorde poging aan de tel-getallen andere getallen toe te voegen. Daar piekerden de Grieken niet over. De schok had te maken met een heel andere verwachting, namelijk dat, uitgaande van de vooronderstelling dat alle getallen tel-getallen zijn, de eenheid van rekenkunde en meetkunde gehandhaafd zou kunnen worden.

Vooral Pythagoras hoopte en geloofde dat het mogelijk moet zijn van elke proportie te *vertellen* welke het is door aan te geven waar die in het rijk van de getallen is terug te vinden. Deze verwachting is niet zo gek; want ondanks het feit dat één enkele ratio tussen oneindig veel verschillende geordende getalsparen bestaat, zijn er oneindig veel verschillende getalsverhoudingen. Gegeven twee onderling vergelijkbare grootheden, die zelf geen getallen zijn, zeg twee lengtes, twee oppervlakken of twee volumina, dan moet het volgens deze verwachting mogelijk zijn te ‘vertellen’ in welke verhouding ze staan. Mits je de betreffende getallen maar groot genoeg kiest of, wat op hetzelfde neerkomt, mits je de maat waaraan je de meetbare grootheden afmeet maar klein genoeg kiest, moet je de getallen kunnen aangeven waartussen dezelfde verhouding bestaat.

1.2 Het schokkende bewijs van het tegendeel

Het bewijs dat deze verwachting niet uitkomt, berust op twee aannames. In de eerste plaats: als van twee gelijkvormige figuren de afmetingen zich verhouden als n:m, verhouden hun oppervlakken zich als n.n : m.m. In de tweede plaats: van de oneindig vele manieren waarop een verhouding tussen getallen kan worden weergegeven, is één de allereenvoudigste. Dáárvoor geldt altijd dat minstens één van de termen oneven moet zijn. Want als beide getallen even zijn, bestaat dezelfde verhouding tussen de helft van elk. Zo kun je doorgaan tot alle gemeenschappelijke factoren zijn geëlimineerd. Hieruit volgt, dat voor een echte ratio van getallen nooit kan gelden, dat beide even *moeten* zijn.

Dat laatste is echter het gevolg als je wilt vertellen wat de proportie is van de diagonaal tot de zijde van een vierkant. Het vierkant dat de diagonaal als zijde heeft, is tweemaal zo groot als het vierkant waarvan die diagonaal de diagonaal is. Stel de diagonaal staat tot de zijde als n:m, dan geldt: n.n=2m.m. Hieruit volgt dat n.n even is. Maar dan moet n ook even zijn, want het kwadraat van een oneven getal is altijd oneven. Als n even is, is n.n een 4-voud. Daaruit volgt dat ook m.m even moet zijn en dus m ook.

Natuurlijk is het heel goed mogelijk dit schitterende bewijs in een zodanige vorm te gieten, dat van het bestaan van rationale getallen wordt uitgegaan. Voor moderne mensen zoals wij is de verleiding groot dat te doen. Maar het hoeft niet. Aan de kracht van het bewijs wordt op geen enkele wijze afbreuk gedaan als je het typisch Griekse dogma huldigt, dat de verhouding van getallen niet als een getal opgevat kan worden.

Als je dit dogma niet huldigt, als je bereid bent tussen de natuurlijke getallen ook nog oneindig veel gebroken getallen te accepteren, dan ligt het zeer voor de hand de ontdekking van het irrationale te zien als een uitnodiging tussen de gebroken getallen ook nog andere, irrationale getallen te erkennen. Maar gezien vanuit de Grieken had die ontdekking een heel andere betekenis. Voor hen bleek er uit dat de meetkunde aan de rekenkunde ontsnapt en dat de droom van Pythagoras, te weten dat het getalmatige het principe is van de kosmos, in rook opgaat.

2 HET GRIEKSE DOGMA EN HET WEZEN VAN DE GETALLEN

2.1 Argumenten voor het Griekse dogma

a) Het in vele talen, waaronder het Grieks, bestaande verband tussen de woorden “getal” en “tellen” kan toch moeilijk als volkomen willekeurig terzijde worden geschoven. Voor de rekenkunde is die samenhang even essentieel als voor de meetkunde het verband met meten.
Het feit dat wij de door de Grieken als enige erkende getallen ‘natuurlijk’ noemen, spreekt boekdelen. In alle pogingen die er in de negentiende-eeuwse wiskunde zijn gedaan de invoering van andersoortige getallen te rechtvaardigen, fungeren de natuurlijke getallen als basismateriaal, waaruit de rest wordt opgebouwd. De wiskundige Kronecker (1823-1891) heeft ooit gezegd dat de natuurlijke getallen door God gemaakt zijn, de overige door de mens. Neem je met de meeste Grieken aan, dat wiskunde met iets goddelijks te doen heeft, dan volgt daaruit vanzelf dat niet-natuurlijke getallen uit den boze zijn.

b) Aristoteles, één van de meest gezaghebbende en invloedrijke filosofen wiens gedachtegoed mede door Thomas van Aquino (1224-1274) in het Christendom is geïntegreerd, heeft de beperking van het getalmatige tot het telbare als volgt verantwoord. Wiskunde is een abstracte wetenschap. Al het kwalitatieve wordt buiten beschouwing gelaten, zodat alleen het kwantitatieve overblijft. Maar er zijn twee onderling onherleidbare vormen van kwantiteit: telbare en meetbare. Daarop berust het onderscheid tussen rekenkunde en meetkunde.
Om te verduidelijken wat Aristoteles bedoelt, kan gewezen worden op het contrast dat in het Nederlands tot uiting komt in “Hoeveel x-en?” enerzijds en “Hoeveel x?” anderzijds. In het Engels wordt dit gemarkeerd met de woorden *many* en *much*. De vraag “How many?” heeft betrekking op een telbare hoeveelheid, een aantal. En een aantal bestaat uit eenheden die als een *natuurlijke maat* fungeren. Als je telt hoeveel appels er in een mand zitten, verschillen ze misschien in grootte, maar dat doet er niet toe. Want de grootte van een aantal berust louter en alleen op veelvuldigheid. Elke appel telt als één ondeelbare eenheid. Want ook al is elke appel deelbaar, die delen tellen niet mee omdat het geen appels zijn.

Maar als je wil weten hoeveel wijn er gedronken is, moet je een willekeurige, *kunstmatige maat* als eenheid kiezen. De grootte van een volume is alleen te bepalen door het te vergelijken met een ander volume dat tot eenheid is gebombardeerd: een liter, een pint, een gallon of iets dergelijks. Voor alle meetbare hoeveelheden, zoals lengte, oppervlak of tijdsduur geldt hetzelfde. Een lengte van 2¾ meter heeft een grootte dankzij het feit dat elke meter een grootte heeft die deelbaar is in kleinere delen. Hieruit blijkt vanzelf waarom zoiets als 2¾ of 11/4 geen getal is. Want 2¾ heeft op zichzelf genomen evenmin een grootte als een procent. Het heeft geen zin te vragen hoe groot 10% of 2¾ is. Want er komt slechts grootte aan toe voorzover het 10% of 2¾ is *van* iets dat grootte heeft.

c) Redelijkerwijs kunnen we aannemen dat Pythagoras en zijn leerlingen zoiets als 11/4 ook anders hebben opgevat: niet alleen als 11 keer het vierde deel van iets, maar als ratio, als de verhouding waarin het getal 11 tot het getal 4 staat. Gezien vanuit dit perspectief kan de argumentatie tegen gebroken getallen als volgt worden gereconstrueerd. Een verhouding is iets onherleidbaars dat nooit en te nimmer vergeleken kan worden met de zaken of personen die in de verhouding staan. Relaties bestaan bij de gratie van hun dragers en kunnen nooit als drager van een nieuwe relatie fungeren. Natuurlijk kan uit een relatie van personen een derde persoon *voortkomen*, maar dat is toch geen reden kinderen met de verhouding van hun ouders te vergelijken of te identificeren.
Het bijzondere van proporties tussen vergelijkbare grootheden is, dat ze niet aan die grootheden gebonden zijn. Het heeft geen zin een getal met een lengte te vergelijken of een lengte met een oppervlak. Maar *dezelfde* ratio die tussen getallen bestaat, kan op alle groottegebieden worden teruggevonden, als verhouding van twee snaarlengtes, van twee oppervlakken of twee volumina. Het vervelende is echter, dat er in de wereld van het meetbare ook irrationale proporties voorkomen die niet bij de getallen zijn terug te vinden.

2.2 De noodzaak van kritiek

Alvorens tot kritiek over te gaan wil ik eerst even stilstaan bij de vraag of het eigenlijk wel de moeite loont argumenten serieus te nemen die pleiten voor een verloren zaak. Het lijkt van niet. Want hoe vernuftig de redenen ook mogen zijn die in het verre verleden zijn aangevoerd om alleen de natuurlijke getallen te erkennen, *wij* weten wel beter. Het resultaat van een eventuele weerlegging van het Griekse dogma zou hoogstens kunnen zijn, dat het daadwerkelijk een dogma is. Maar dat wisten we al.

Deze bedenking zou terecht zijn, als het zo was dat er slechts twee mogelijkheden zijn: óf het Greikse dogma wordt volledig geaccepteerd, óf het wordt volledig verworpen. Maar mijns inziens is er nog een derde mogelijkheid, namelijk dat het in de misleidende vorm van een moderne, anti-dogmatische geesteshouding ongemerkt blijft voortleven. De essentie van het Griekse dogma is niet, dat onze zogenaamde ‘niet-natuurlijke’ getallen uit den boze zouden zijn, maar dat ze daadwerkelijk *niet-natuurlijk* zouden zijn.

Die opvatting kan op twee tegengestelde manieren gehuldigd worden: als orthodoxe beperking tot telgetallen of als moderne, onorthodoxe acceptatie van andere, min of meer kunstmatig geachte getallen. Ik hoop beide varianten aan kritiek te onderwerpen door aan te tonen dat de zogenaamde ‘natuurlijke’ getallen weliswaar de meest elementaire zijn, maar dat andere, minder elementaire getallen daarom niet als minder natuurlijk kunnen worden beschouwd. Anders gezegd: zowel de orthodoxe als de onorthodoxe variant van het Griekse dogma berust volgens mij op de verwarring van het elementaire met het natuurlijke.

De gang van het hierna volgende betoog is als volgt. Ik vertrek vanuit het laatstgenoemde, pythagoreïsche argument. Dat zal ik in twee stappen aan kritiek onderwerpen. Eerst (2.3) door te betogen dat het berust op een miskenning van datgene wat wezenlijk is voor het kwantitatieve in het algemeen, waartoe zowel getallen behoren als andersoortige grootheden. Daarna (2.4) zal ik op het wezenskenmerk ingaan waardoor het getalmatige zich van andere grootheden onderscheidt. Ook dat wordt door het Griekse dogma miskend. In 2.5 zullen de in de vorige paragraaf onder a) en b) genoemde argumenten aan bod komen.

Mijn omschrijving van het wezen van de getallen als een bepaald soort hoegrootheden (grootheden waarvoor het zin heeft te vragen hoe groot ze zijn) is niet bedoeld als afsluiting, maar eerder om een nieuw perspectief te openen dat ongetwijfeld meer vragen oproept dan ik kan beantwoorden. De belangrijkste consequentie van dat perspectief is, dat machtsverheffen als de enige puur getalmatige bewerking kan worden aangemerkt. Dat zal in sectie 3 besproken worden, zodat daarna, in sectie 4, de negatieve en imaginaire getallen in een nieuw licht geplaatst kunnen worden.

2.3 Eerste punt van kritiek: het wezen van het kwantitatieve miskend

Het pythagoreïsche credo dat een verhouding nooit en te nimmer op één lijn gesteld kan worden met de dragers van die verhouding, klinkt heel aannemelijk zolang je bij voorbeeld denkt aan personen, kleuren of gebeurtenissen. Maar daarmee is nog niet bewezen dat voor grootheden precies hetzelfde geldt.
Voorlopig wil ik de relatie waaraan Pythagoras en zijn leerlingen in eerste instantie denken, de proportie, buiten beschouwing laten. Ik wil me hier beperken tot een relatie die zo elementair is, dat het relationele karakter ervan makkelijk over het hoofd kan worden gezien, namelijk *verschil*. Elk verschil is een relatie want het bestaat *tussen* het één en het ander. Bovendien is elk verschil een verschil in een bepaald *opzicht*. Het heeft geen zin te vragen naar het verschil tussen Nederland en Denemarken of tussen Plato en Aristoteles zonder het opzicht nader te specificeren. Grootte is één van de vele opzichten waarin dingen kunnen verschillen.

Welnu, mijn stelling luidt dat grootte, toegepast op zaken waarvoor het zin heeft te vragen hoe groot ze zijn, in dit verband een heel bijzondere rol speelt. Het is het enige opzicht waarvoor het pythagoreïsche credo *niet* opgaat. Voor geen enkel ander opzicht X geldt, dat *een verschil in X in X vergelijkbaar is met de dragers van dat verschil*. Maar voor grootte geldt het wel. Het heeft geen zin het verschil in kleur te vergelijken met de dingen waartussen dat verschil bestaat, tenzij je kleur op één of andere manier kwantitatief opvat. Maar het heeft wel degelijk zin te vragen hoe groot het verschil in grootte is tussen Jan en Piet. Jan is een kop groter. En dat verschil in lengte heeft een lengte die met de lengte van Jan en van Piet vergeleken kan worden, zodat je bij voorbeeld ook kunt vragen hoe groot het verschil is tussen Piet en het verschil in grootte tussen Jan en Piet.

Uit dit voorbeeld blijkt direct, dat van een verschil in grootte alleen sprake is, als er meer of minder stilzwijgend één of andere specificatie is verondersteld: lengte, volume, gewicht etc. In de fysica spreekt men in dit verband over dimensies. Getallen beschouwt men dan als dimensieloze grootheden. Om misverstanden te voorkomen zal ik een andere terminologie invoeren. Ik spreek over *groottegebieden*. Grootheden zijn onderling vergelijkbaar dan en slechts dan als ze tot hetzelfde gebied behoren. Alle aantallen zijn onderling vergelijkbaar en alles wat in grootte met een telbare hoeveelheid vergelijkbaar is, behoort tot hetzelfde groottegebied. Tot nu toe neemt het telbare op geen enkele manier een uitzonderlijke positie in. Het verschil in aantallen is in grootte vergelijkbaar met de aantallen waartussen dat verschil bestaat omdat voor het groottegebied waartoe aantallen behoren, hetzelfde geldt wat voor alle groottegebieden geldt.

2.4 Tweede punt van kritiek: het wezen van het getalmatige miskend

In de vorige paragraaf heb ik gezegd: elk absoluut *verschil* tussen grootheden kan worden gezien als een *relatie* en wel als een relatie die een grootte heeft die vergelijkbaar is met de grootte van de dragers van het verschil. De volgende stap luidt: de *relatie* tussen vergelijkbare grootheden waaraan Pythagoras primair denkt, kan ook worden gezien als een *verschil*. Elke proportie is immers een *factor* van verschil.

Hoe komen we die tegen? Door twee vergelijkbare grootheden te nemen (aantallen of niet) en niet alleen de één met de ander te vergelijken, maar hun absolute verschil aan dezelfde maat af te meten. Bij voorbeeld: ik zie een rechthoekige tafel en vergelijk de lengte met de breedte. De lengte fungeert dan als het gemetene en de breedte als maat. Stel dat de breedte nog één keer past in het verschil tussen lengte en breedte en dat de rest kleiner is dan de breedte. Dan stap ik over naar een van de breedte afgeleide maat. Stel dat die rest precies gelijk is aan één zevende deel van de breedte, dan is de lengte *2 1/7 keer* zo groot als de breedte.

We zien hier drie nieuwe dingen:

i) een verschil tussen onderling vergelijkbare grootheden dat, in ieder geval in dit geval, en dus *niet altijd* vergelijkbaar is met de grootheden waartussen het bestaat. We kunnen zeggen: lengte=2 1/7.breedte of: lengte:breedte=2 1/7, maar het heeft geen zin de lengte of de breedte met hun proportie te vergelijken.

ii) een overbrugging tussen verschillende groottegebieden. Uiteraard blijft het zo, dat een lengte, een oppervlak, een volume of een hoek nooit en te nimmer in grootte met elkaar vergeleken kunnen worden. Want, zoals eerder gezegd zijn grootheden dan en slechts dan vergelijkbaar als ze tot hetzelfde gebied behoren. Maar een *proportie* van lengtes is wel degelijk vergelijkbaar met een *proportie* van oppervlakken of een *proportie* van volumina. De factor 2 1/7 kan overal als factor van verschil optreden.

iii) hieruit lijkt te volgen, dat proporties vanwege hun universele, kosmopolitische karakter in geen enkel gebied thuishoren. Maar dat is niet het geval. Elke proportie is namelijk ondanks het feit dat die zelf niet een aantal is, in grootte vergelijkbaar met een aantal. De factor 2 1/7 oftewel 15:7 of 30:14 of 45:21 enz. is groter dan 2 en kleiner dan 3.

De in i) genoemde stelregel kan dus als volgt worden aangevuld: Een proportie is niet vergelijkbaar met de onderling vergelijkbare grootheden waartussen die proportie bestaat *tenzij* die grootheden tot het gebied van het telbare behoren. Want een proportie tussen aantallen of tussen een aantal en een proportie of tussen twee proporties is wel vergelijkbaar met de grootheden waartussen die proportie bestaat. Hiermee is het eerste en meest fundamentele, door het Griekse dogma miskende wezenskenmerk van het getalmatige bepaald. *Getalmatige grootheden zijn in grootte vergelijkbaar met hun eigen proporties*.

In het licht van de vorige paragraaf kan dit nog als volgt worden toegelicht. Kenmerkend voor alle hoegrootheden is, dat ze in grootte vergelijkbaar zijn met hun absolute verschil. Als het zin heeft te zeggen dat a-b=c en dat dus ook geldt b+c=a, dan moeten a, b en c tot hetzelfde groottegebied behoren. In deze paragraaf is gebleken dat aan dit kenmerk van het kwantitatieve nog iets kan worden toegevoegd, namelijk dat het verschil ook proportioneel opgevat kan worden. Als het zin heeft te zeggen dat (a:b)=(c), en dus ook dat (c).b=a, dan moeten a en b tot hetzelfde groottegebied behoren. De factor (c) is, zoals de haakjes aangeven, doorgaans niet vergelijkbaar met a en b maar wel met elke andere proportie. Alle proporties behoren tot hetzelfde groottegebied, te weten het gebied waartoe ook het telbare behoort.

Dit tweede kenmerk van het kwantitatieve in het algemeen heeft dus als keerzijde een kenmerk waardoor het getalmatige zich van alle overige groottegebieden onderscheidt: Daar en alleen daar krijgen we te doen met een homogene vergelijking van de vorm ((a):(b))=(c) of (c).(b)=(a). Anders gezegd: wat voor de optelling overal geldt, namelijk dat de drie factoren, het vermeerderde, dat waarmee vermeerderd wordt en het resultaat onderling vergelijkbaar zijn, dat geldt voor het getalmatige ook op het vlak van proportie en vermenigvuldiging. Het vermenigvuldigde (b), de factor van vermenigvuldiging (c) en het resultaat (a) behoren alledrie tot hetzelfde gebied.

2.5 Kritiek op Aristoteles en Kronecker

Nu zijn we in staat het in 2.1b) besproken argument van Aristoteles te ontzenuwen. Hij zegt: zoiets als 2 1/7 heeft op zichzelf genomen geen grootte. Want je weet pas hoe groot 2 1/7 van X is als je de grootte van X kent. Een lengte l_1, van 2 1/7 voet is een andere dan l_2 van 2 1/7 el of l_3 van 2 1/7 duim. Bovendien hoeft X helemaal niet een lengte te zijn. Misschien gaat het om een gewicht g_1, van 2 1/7 pond of g_2 van 2 1/7 kilo of om een hoek h_1 van 2 1/7 graad of h_2 van 2 1/7 radiaal.

Inderdaad, maar dat alles neemt niet weg dat l_1:1voet=l_2:1el=l_3:1duim=g_1:1pond=g_2:1kilo=h_1:1graad=h_2:1radiaal. Kortom 2 1/7 duidt een factor van verschil aan die tussen verschillende lengtes, gewichten of hoeken kan bestaan. En diezelfde proportie bestaat ook tussen de getallen 15 en 7 of 30 en 14 of 45 en 21 etc. Het hangt van conventie en willekeur af welke maateenheid we gebruiken. Maar is die eenmaal gekozen, dan is de proportie van één of andere grootheid tot de bijbehorende maat *van nature* bepaald. Ik kan me ook van geen enkele conventie iets aantrekken door bij voorbeeld aan één of andere lengte, zeg de breedte van deze tafel één of ander getal toe te kennen, zeg het getal 17. Maar zodra dat gebeurd is, ligt de lengtemaat vast en komt er *van nature* aan de proportie van willekeurig welke lengte tot die maat een getal toe dat *van nature* tussen de natuurlijke getallen en tussen andere proporties een vaste plaats inneemt.

Hieruit blijkt tevens waarom Kronecker, die een sluimerend modern schuldgevoel expliciet heeft gemaakt, te veel aan het Griekse dogma vasthoudt. De opvatting dat alle getalsystemen die het telbare overstijgen zich daartoe zouden verhouden als huizen tot natuursteen, ijzererts en bomen, lijkt mij onhoudbaar. Als God ons de ‘natuurlijke’ getallen gegeven heeft, dan automatisch ook hun met die getallen vergelijkbare proporties. Die zijn weliswaar minder elementair dan de ‘natuurlijke’ getallen, maar daarom niet minder natuurlijk.

3 MACHTSVERHEFFEN ALS EXCLUSIEF NUMERIEKE BEWERKING

3.1 De bijzondere status van machtsverheffen

Als de voorlopige, in 2.4 geschetste wezensbepaling van het getalmatige juist is, dan kan daaruit een belangrijke conclusie worden getrokken, namelijk dat alleen getallen vatbaar zijn voor machtsverheffen. Deze bewerking is immers alleen mogelijk als het vermenigvuldigde en datgene waarmee vermenigvuldigd wordt, de factor van verschil, even groot zijn. Welnu, ze kunnen alleen even groot zijn, als ze in grootte vergelijkbaar zijn en dus tot hetzelfde groottegebied behoren. En dat is alleen mogelijk als de vergelijking van de vorm (a:b)=(c) of (c).b=a homogeen is. Aan die voorwaarde kan alleen worden voldaan als a en b niet alleen met elkaar vergeleken kunnen worden, maar ook met (c).

Alle grootheden zijn vermenigvuldigbaar. Als je de meter als lengtemaat hebt gekozen, kun je op basis daarvan grotere en kleinere eenheden invoeren door steeds met een factor 10 of een factor 1:10 te vermenigvuldigen. Je krijgt dan een serie lengtes: meter, decameter, hectometer, kilometer etc. en meter, decimeter, centimeter, millimeter etc. waarvoor geldt dat elk lid het middenevenredige is tussen de twee naastgelegen lengtes. We zien hier dus herhaalde vermenigvuldiging met een factor 10 of 1:10. Eén kilometer=10^3.1meter. De betreffende lengtes fungeren steeds opnieuw als *datgene wat* vermenigvuldigd wordt, nooit en te nimmer als dat *waarmee* vermenigvuldigd wordt.

3.2 Antwoord op een objectie

Maar hoe zit het dan met een vierkante meter of een kubieke meter, die we respectievelijk als m^2 en m^3 plegen aan te duiden? Dat is een even onzinnige als handige conventie. Zolang je de onzin doorziet, kan het geen kwaad, maar als je het kleine onschuldige kinderen leert zonder zin van onzin te scheiden, is de kans groot dat er een diepe aversie tegen de exacte vakken wordt aangekweekt. Uiteraard is geen enkele lengte vierkant, ook niet een lengte van één meter. Maar er bestaan wel vierkanten waarvan de zijden één meter lang zijn. Zo'n vierkant kan als een van de meter afgeleide oppervlaktemaat dienst doen. In plaats daarvan hadden we ook een cirkel met een diameter van één meter kunnen kiezen of een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden één meter lang zijn, maar dat in de meeste gevallen minder handig.

Op school leren we dat de oppervlakte van een rechthoek gelijk is aan lengte maal breedte. Aldus wordt de suggestie gewekt dat een lengte niet alleen met een bepaalde numerieke factor vermenigvuldigd kan worden, maar ook als factor van vermenigvuldiging kan optreden. Dat laatste is onzin. Wat betekent die o zo handige formule dan? In feite alleen maar dat een rechthoek met lengte l en breedte b een oppervlak heeft dat (l:e).(b:e) keer zo groot is als het oppervlak van een vierkant waarvan de zijden de lengte e hebben.

Sprekend over m^2 oftewel een vierkante meter wekken we de suggestie dat er een uitzonderlijk innig verband bestaat tussen verheffen tot de tweede macht en een vierkant. In veel talen komt deze suggestie ook hierin tot uiting dat beide met hetzelfde woord worden aangeduid: “kwadraat”, “square” e.d . In feite echter bestaat zo'n bijzonder verband helemaal niet. Voor *willekeurig welke* gelijkvormige figuren F_1 en F_2 met respectievelijke afmetingen l_1 en l_2 geldt, dat het oppervlak van F_1 een factor $(l_1:l_2)^2$ keer zo groot is als het oppervlak van F_2.

3.3 De inversen van machtsverheffen

Machtsverheffen is de minst elementaire positieve bewerking. Om te begrijpen wat vermenigvuldiging is, moet je met de optelling vertrouwd zijn en om te begrijpen wat machtsverheffen is moet je met vermenigvuldiging vertrouwd zijn. Bovendien is machtsverheffen de enige positieve bewerking die niet commutatief is. Het gevolg daarvan is, dat er twee verschillende inversen zijn: worteltrekken en het nemen van de logaritme.

Gezien vanuit een psychologisch en didactisch standpunt kan gezegd worden dat de logaritme het allermoeilijkst is. Dat geldt niet alleen voor schoolkinderen maar ook voor grote wiskundigen uit het verleden. Het heeft in de geschiedenis nogal wat tijd en moeite gekost voor de logaritme ingeburgerd raakte. De eerste logaritmetafels werden aan het begin van de zeventiende eeuw vervaardigd om berekeningen te vergemakkelijken.

Waarop is deze facilitaire rol gebaseerd? Op het feit dat door de logaritme machtsverheffen wordt *vertaald* in vermenigvuldigen en vermenigvuldigen in optellen. En evenzo wordt het trekken van de n^e machtswortel verlaagd tot delen door n en delen tot aftrekken. Dit kan in principe aan de hand van de natuurlijke getallen worden toegelicht: $((10^9)^3=10^{9.3}$,

Zodra gebroken getallen zijn geaccepteerd, kunnen vermenigvuldigen en delen in elkaar worden vertaald. Immers: delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde en vermenigvuldigen delen door het omgekeerde. Voor machtsverheffen en worteltrekken geldt dan hetzelfde. Worteltrekken is verheffen tot de omgekeerde macht en verheffen tot de macht n/m komt op hetzelfde neer als het nemen van de m/n-de machtswortel. Maar voor de logaritme geldt iets dergelijks niet. Die dient zich aan als een onherleidbare inverse.

4 TOEPASSING OP NEGATIEVE EN IMAGINAIRE GETALLEN

4.1 Negatieve op basis van gebroken getallen

De gangbare rechtvaardiging van negatieve getallen is tweeledig. Enerzijds kan een beroep gedaan worden op de toegepaste wiskunde. Sommige meetbare grootheden vertonen zoiets als het onderscheid tussen positief en negatief. Denk bij voorbeeld aan credit en debet, of aan de waterstand die zowel boven als beneden NAP kan zijn, aan links en rechts ten opzichte van een bepaald punt op een lijn of aan positieve en negatieve elektrische lading. Anderzijds kan gewezen worden op de zuiver wiskundige behoefte zo veel mogelijk vergelijkingen op te kunnen lossen. Een simpele vergelijking zoals 12+x=5 zou zonder de negatieve getallen onoplosbaar zijn.

Het eerste argument lijkt me nogal dubieus omdat niet is in te zien waarom kenmerken die typerend zijn voor sommige niet-getalmatige grootheden zomaar op de getallen kunnen worden overgeplant. Als je daarmee begint, zou je ook elektrische, magnetische of mechanische getallen moeten introduceren. Als de acceptatie van negatieve getallen gerechtvaardigd kan worden, dan zal dat vanuit de wiskunde zelf moeten gebeuren. Maar een beroep op de 'zuiver' mathematische behoefte zo veel mogelijk vergelijkingen op te kunnen lossen kan mijns inziens geen uitkomst bieden. Want hoe zuiver is die behoefte eigenlijk? Waarom zou het niet aangenaam zijn een getal te introduceren dat voldoet aan de vergelijking x+1=x?

Maar in het licht van datgene wat in de vorige paragraaf aan de orde is gekomen, is het helemaal niet nodig op deze of dergelijke argumenten een beroep te doen. Negatieve getallen verschijnen vanzelf als de macht waartoe een grondgetal >1 verheven moet worden om een getal <1 op te leveren (of andersom). Toegelicht aan de hand van zeer eenvoudige voorbeelden is de situatie als volgt: $10^4:10^3$……….formules

Zodra het positionele cijferstelsel, dat we aan de Moslims te danken hebben, is ingeburgerd, ligt het zeer voor de hand volgens de uitvinding van Stevin (1548-1620) tiendelige breuken met cijfers achter de komma weer te geven. We schrijven 243,65 en bedoelen daarmee: 2.10^2 Omdat we geneigd zijn het positieve met rechts en het negatieve met links te associëren, zou het nog veel duidelijker worden, als we de volgorde van de cijfers omkeerden door 243,65 te schrijven als 56,342.

Berust deze rechtvaardiging alleen maar op de dubieuze behoefte zo veel mogelijk vergelijkingen op te kunnen lossen, in dit geval vergelijkingen van de vorm ? Nee, volgens mij niet. Ik doe een beroep op twee grondbeginselen. In de eerste plaats dat voor proporties in het algemeen geldt dat (a:b).(b:a)=1. Ook elke ratio (n:m) 0 heeft precies één inverse, namelijk (m:n). Alleen (n:n)=1 is gelijk aan z'n eigen inverse. Elke ratio die groter is dan 1 heeft een inverse die kleiner is dan 1 en andersom. Het tweede grondbeginsel is, dat door de logaritme, die in het wezen van machtsverheffen ligt opgesloten, vermenigvuldigen en delen in optellen en aftrekken worden vertaald. De driedeling kleiner dan, gelijk aan of groter dan 1 wordt in de exponent vertaald in kleiner dan, gelijk aan of groter dan 0.

Uiteraard wil ik niet suggereren dat de introductie van negatieve getallen moet plaatsvinden zodra de rationale getallen zijn geaccepteerd. Het ligt meer voor de hand de feitelijke historische route te volgen door eerst aan irrationale getallen aandacht te besteden. Het punt waar het mij om gaat, is alleen maar dat de in 0.1 geschetste landkaart niet deugt. Uitgaande van de 'natuurlijke' getallen kan er maar één stap gezet worden: naar de rationale getallen. Pas daarna komt er een tweesprong.

4.2 De problematische saamhorigheid van negatieve en imaginaire getallen

Volgens de standaardopvatting hebben de imaginaire getallen de nagatieve nodig, maar niet andersom. Invoering van negatieve getallen zonder imaginaire zou geen enkel probleem opleveren. Bovendien zouden imaginaire getallen in een handomdraai aan de negatieve kunnen worden toegevoegd als eenmaal vaststaat dat $i^2=-1$. Want daaruit volgt vrijwel vanzelf hoe optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen gedefinieerd moet worden.

Zodra echter de centrale betekenis van machtsverheffen is onderkend, blijken beide aannames onjuist te zijn. Want stel dat je alleen negatieve getallen accepteert, dan geldt, zodra de irrationale getallen hun intrede hebben gedaan, dat elk positief getal tot een positieve of negatieve macht verheven kan worden. Maar hoe zit het dan met een negatief grondtal? Denk bij voorbeeld aan ……………….De rationale exponent (2:3) is op oneindig veel verschillende manieren te schrijven, o.a. ook als (4:6). Maar vervangen we 2/3 door 4/6, dan ontstaat er een probleem, tenzij zoiets als (   ) wordt geaccepteerd.

We worden dus, zelfs als we de irrationale getallen buiten beschouwing laten, vanzelf gedwongen de acceptatie van het getal i, waarvoor geldt ………..in overweging te nemen. Maar dan ontstaat er een ander probleem dat opnieuw met machtsverheffen te maken heeft. We kunnen dan de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen definiëren en op basis daarvan ook wat het betekent a+bi tot een positieve of negatieve rationale of zelfs irrationale macht te verheffen. Maar het is vooralsnog volstrekt onduidelijk wat verheffen tot een imaginaire macht zou kunnen betekenen. Wat zouden we bij voorbeeld onder i^i moeten verstaan?

Maar er is één lichtpuntje. Uit $i^2=-1$volgt vanzelf $i:-1=1:i$. Als je i accepteert, dan zouden i en –i beide het middenevenredige zijn tussen 1 en -1 terwijl ook omgekeerd 1 en -1 middenevenredige zijn tussen i en –i. Ga nu op dezelfde voet voort door je b.v. af te vragen wat als middenevenredige tussen 1 en i of tussen -1 en i in aanmerking zou kunnen komen. Een simpele berekening laat zien dat je steeds uitkomt bij complexe getallen $z=a+bi$ waarvoor geldt ……..oftewel   . Voorgesteld in het complexe vlak liggen die getallen op een cirkel met 0 als middelpunt en 1 als straal. Deze getallen zijn te schrijven als cosφ+i sinφ, waarbij φ het argument voorstelt. Het middenevenredige tussen …………Anders gezegd: het middenevenredige of *meetkundig* midden wordt gevonden door het *rekenkundig* midden van de betreffende hoeken te bepalen. Dit wijst erop dat vermenigvuldigen in optellen vertaald is. Op één of andere manier zouden de getallen van de vorm cosφ+i sinφ als φ-de macht opgevat moeten kunnen worden. Maar hoe precies? Wat zou dan het grondtal kunnen zijn? Dat valt uit deze overwegingen niet op te maken.

4.3 Euler als reddende engel

Het zal duidelijk zijn dat de door Euler ontdekte formule ……….antwoord geeft op de zojuist gestelde vraag. Vul je voor φ het getal π in, dan krijg je………..Hier zie je i gesitueerd ten opzichte van vier andere oergetallen. Een beter toegangsbewijs is nauwelijks denkbaar. Alle problemen die tegen de negatieve en imaginaire getallen leken te pleiten, zijn definitief opgelost.

Maar uiteraard is hierbij verondersteld dat het getal e los van deze formule als oergetal bekend is. Hoe heeft Euler dat getal ontmoet? Eerst als……Dat kan als definitie van het getal e gelden. We zien hier optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen in één formule. Dat wat bij het grondtal 1 wordt opgeteld is gekoppeld aan de macht waartoe het resultaat van de optelling verheven wordt. Het verschil van het grondtal met 1 enerzijds en de macht waartoe het verheven wordt anderzijds, zijn elkaars inversen.

De tweede ontmoeting vond plaats in de differentiaal – en integraalrekening. De afgeleide van de exponentiële functie……..is gelijk aan diezelfde functie vermenigvuldigd met een constante die gelijk is aan de afgeleide voor x=0. Kies je voor a het getal 2, dan is c<1, kies je voor a het getal 3, dan is c>1. Er moet dus tussen 2 en 3 een waarde van a te vinden zijn waarvoor c=1, zodat Deze functie kan op grond van deze eenvoudige differentiaalvergelijking gemakkelijk in een reeksontwikkeling worden uitgedrukt, nl.: Vervolgens kan de waarde van a waarvoor c=1 worden bepaald door voor x het getal 1 in te vullen. Bij nader onderzoek blijkt dat 1+1…………=e.

Exponentiële functies behoren tot dezelfde familie als goniometrische functies. Want op basis van de formules voor sin(α+β) en cos(α+β) kan makkelijk bewezen worden dat =cosx en Ze voldoen aan de differentiaalvergelijking en dus ook aan Omdat sin0=0 en cos0=1 kan op grond hiervan voor beide een reeks worden ontwikkeld. Vul je nu in de reeks van e^x voor x het getal ix in, dan rolt vanzelf de formule van Euler uit de bus.

5 VERKLARING VAN DE MODERNE MISVATTINGEN

Als mijn betoog klopt, rijst de vraag hoe het komt dat er in de moderne wiskunde onopgemerkte misvattingen verzeild zijn geraakt. Mijn antwoord luidt, dat de atmosfeer waarin de draad van de antieke wiskunde weer werd opgepakt, te verhit was om een nuchtere discussie met Griekse vooroordelen toe te laten. De verhitting was te wijten aan de macht van het gevestigde, kerkelijke christendom. Dat had zich vanaf de allereerste concilies, die nog voor de val van het West-Romeinse Rijk plaatsvonden, zeer selectief ten aanzien van het Griekse erfgoed opgesteld. In de Middeleeuwen werd de kerkvaderlijke discriminatie op de proef gesteld door de introductie van Aristoteles die na veel moeite uiteindelijk door de kerk werd geaccepteerd. In de Renaissance sloeg de stemming om. Meer Griekse bronnen werden beschikbaar en de opvatting begon veld te winnen, dat het ware christendom alleen maar sterker wordt, als het uit die bronnen put. Aldus ontstond ook de idee, dat alles wat nieuw leek eigenlijk al in de Oudheid te vinden moest zijn. De verering voor de Grieken was te groot om het eerder besproken dogma uitdrukkelijk aan kritiek te onderwerpen. Daardoor is het ongemerkt een ondergronds leven blijven leiden.